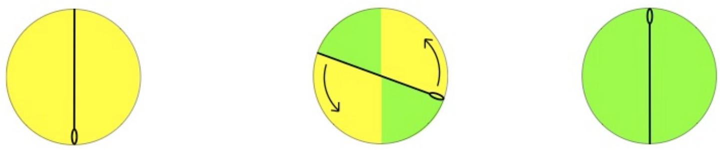
L'aiguille de Kakeya

Ce stand vous propose d'explorer la question posée par Kakeya en 1917 :

Quelle est la plus petite surface à l'intérieur de laquelle il est possible de déplacer une aiguille de manière à la retourner complètement ?

Bien sûr, on peut retourner l'aiguille à l'intérieur d'un disque :



Peut-on faire mieux ?...

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UPMC PARIS UNIVERSITAS

université PARIS DIDEROT PARIS 7

L'aiguille de Kakeya

1) Le triangle de Reuleaux

On retourne maintenant l'aiguille de la façon suivante. On fixe d'abord l'une des extrémités, et on tourne l'aiguille de 60°. On fixe alors l'autre extrémité, et on tourne à nouveau de 60°. On change à nouveau d'extrémité et on fait une dernière rotation. *Dessiner la figure balayée par l'aiguille.*

2) Le triangle

Dessiner une aiguille, et un triangle équilatéral à l'intérieur duquel on peut la retourner. *Décrire le plus petit triangle équilatéral possible.*

3) D'autres formes

On vous propose maintenant d'expérimenter avec les formes en cartons disponibles sur le stand. *Sélectionner celles dans lesquelles on peut retourner l'aiguille. Essayer de les classer, au jugé, de la plus grande à la plus petite aire.*

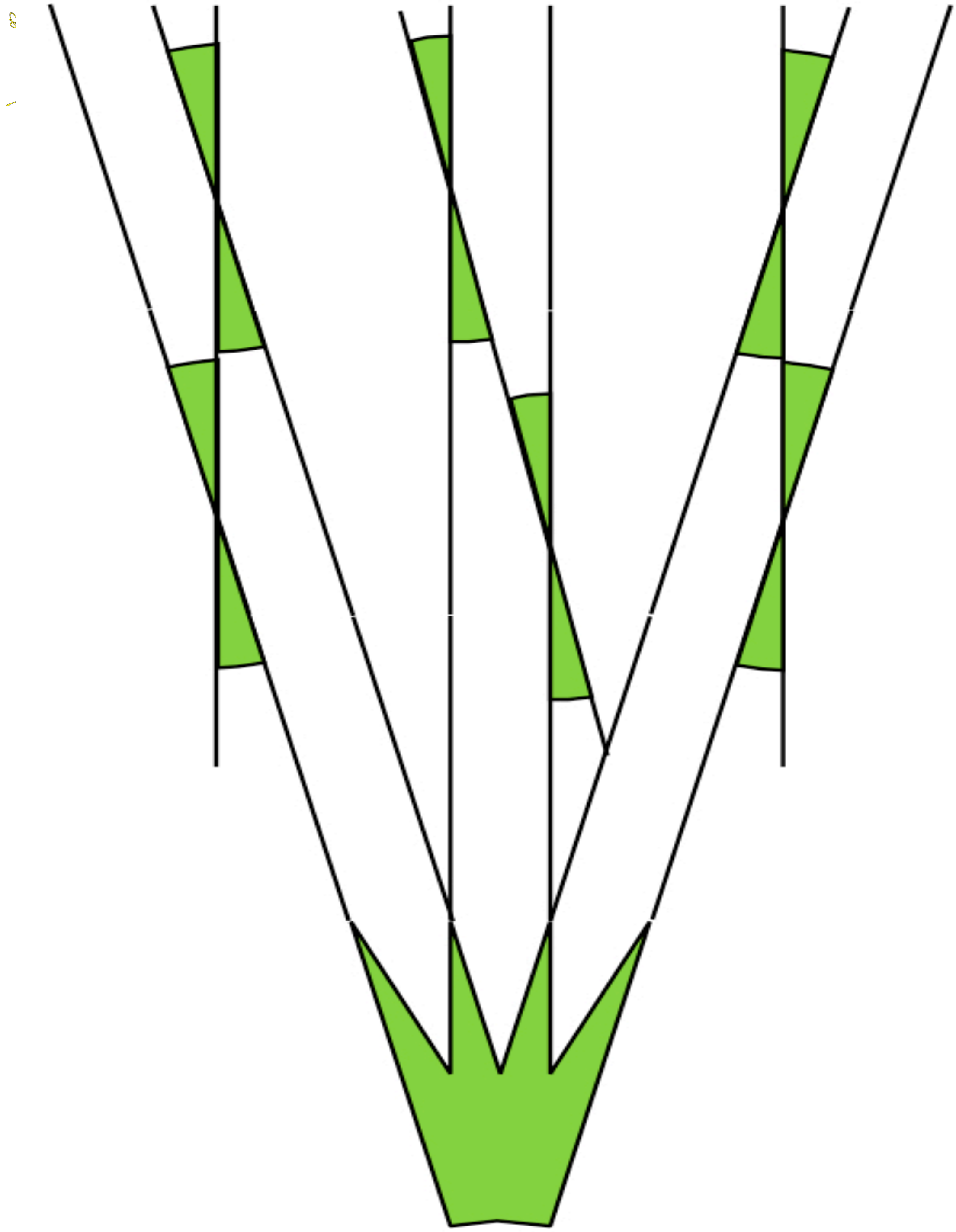
4) Vers la solution...

La page suivante montre un dessin imaginé par le mathématicien Besicovich ; on peut faire tourner l'aiguille de 45° tout en restant dans l'ensemble vert. *Voyez-vous comment ?*

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UPMC PARIS UNIVERSITAS

université PARIS DIDEROT PARIS 7



CNRS CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

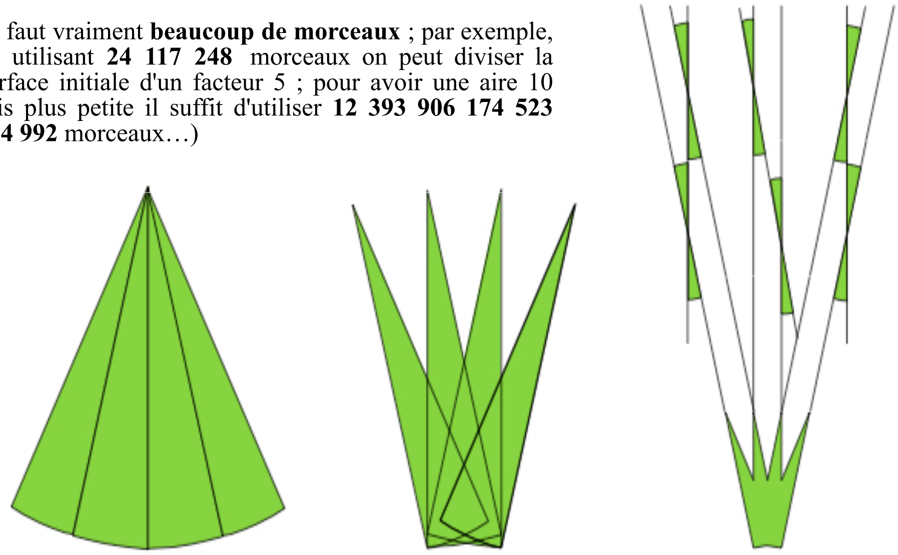
UPMC PARIS UNIVERSITAS

PARIS DIDEROT PARIS 7

L'aiguille de Kakeya

L'idée de Besicovich consiste à découper le secteur angulaire en morceaux (quatre morceaux sur notre figure), à translater les morceaux pour qu'ils se chevauchent le plus possible, puis à ajouter un chouïa de surface pour rendre possible les transitions entre les différents morceaux. Il a calculé qu'en utilisant suffisamment de morceaux, on peut rendre l'aire finale aussi petite que l'on veut.

(Il faut vraiment **beaucoup de morceaux** ; par exemple, en utilisant **24 117 248** morceaux on peut diviser la surface initiale d'un facteur 5 ; pour avoir une aire 10 fois plus petite il suffit d'utiliser **12 393 906 174 523 604 992** morceaux…)



La réponse finale au problème de Kakeya est donnée par le **théorème de Besicovich** (1928) :

Si on suppose que l'aiguille est infiniment mince, on peut la retourner en balayant une surface aussi petite que l'on veut.

L'histoire ne s'arrête cependant pas en 1928 : des mathématiciens explorent actuellement un problème analogue en dimension supérieure, surtout depuis qu'en 1999 Jean Bourgain a mis en évidence un lien avec la répartition des nombres premiers.

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UPMC PARIS UNIVERSITAS

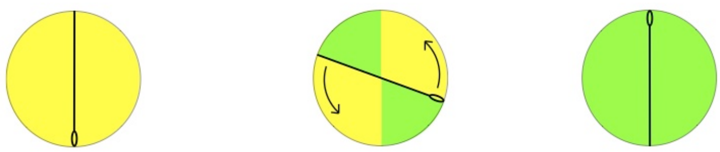
université PARIS DIDEROT PARIS 7

L'aiguille de Kakeya

Ce stand vous propose d'explorer la question posée par Kakeya en 1917 :

Quelle est la plus petite surface à l'intérieur de laquelle il est possible de déplacer une aiguille de manière à la retourner complètement ?

Bien sûr, on peut retourner l'aiguille à l'intérieur d'un disque :



Peut-on faire mieux ?...

L'aiguille de Kakeya

1) Le triangle de Reuleaux

On retourne maintenant l'aiguille de la façon suivante. On fixe d'abord l'une des extrémités, et on tourne l'aiguille de 60°. On fixe alors l'autre extrémité, et on tourne à nouveau de 60°. On change à nouveau d'extrémité et on fait une dernière rotation. *Dessiner la figure balayée par l'aiguille.*

2) Le triangle

Dessiner une aiguille, et un triangle équilatéral à l'intérieur duquel on peut la retourner. *Décrire le plus petit triangle équilatéral possible.*

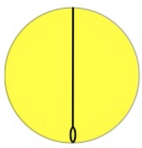
3) D'autres formes

On vous propose maintenant d'expérimenter avec les formes en cartons disponibles sur le stand. *Sélectionner celles dans lesquelles on peut retourner l'aiguille. Essayer de les classer, au jugé, de la plus grande à la plus petite aire .*

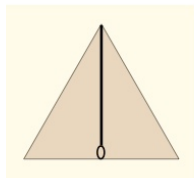
L'aiguille de Kakeya

Pour tester votre classement, nous vous proposons de calculer l'aire des surfaces les plus simples. On suppose que l'aiguille mesure 1 décimètre (dm), et on exprime les aires en dm^2. Vous pouvez vous aider de la fiche sur le calcul des surfaces, et d'une calculatrice.

4) Calculer l'aire du disque dans lequel on peut retourner l'aiguille.



5) Calculer l'aire du triangle équilatéral.



6) Pour calculer l'aire du triangle de Reuleaux, on peut d'abord exprimer cette aire en utilisant uniquement trois secteurs angulaires et un triangle, voyez-vous comment ?...

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

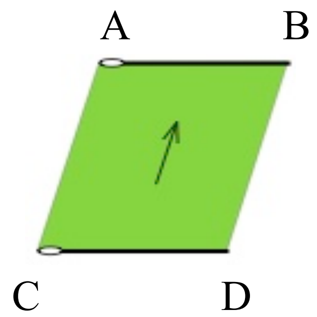
UPMC PARIS UNIVERSITAS

université PARIS DIDEROT PARIS 7

L'aiguille de Kakeya

7) Intermède (question optionnelle)

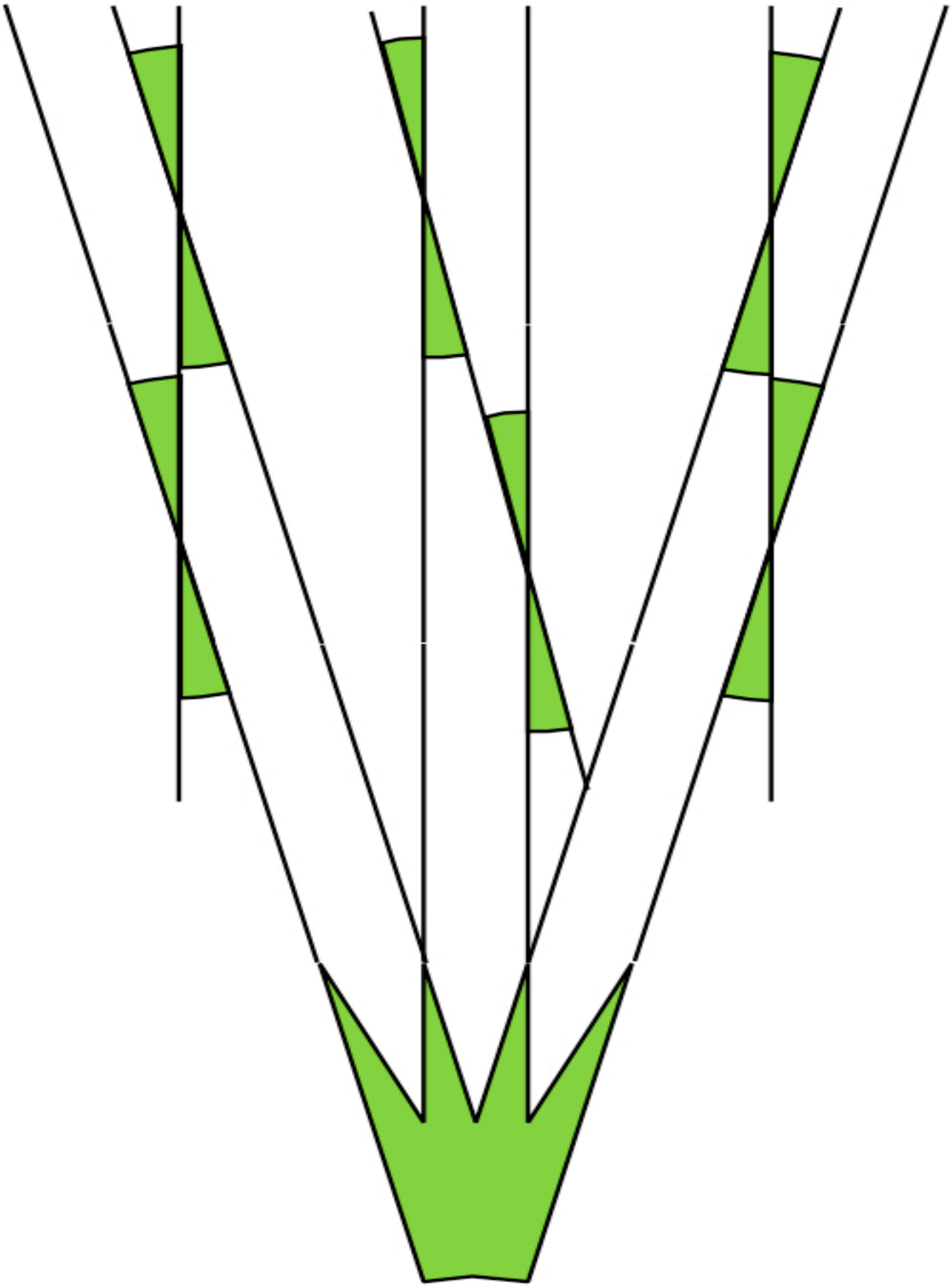
On voudrait maintenant amener l'aiguille de la position AB à une position parallèle CD. Le plus simple est de translater l'aiguille de AB à CD en balayant un parallélogramme, mais à nouveau, on voudrait trouver comment effectuer le déplacement en balayant la plus petite aire possible.



Comment faire mieux que le parallélogramme ABDC ? Quelle est la plus petite surface possible ?

8) Vers la solution

La page suivante montre un dessin imaginé par le mathématicien Besicovich ; on peut faire tourner l'aiguille de 45° tout en restant dans l'ensemble vert. *Voyez-vous comment ?*



CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

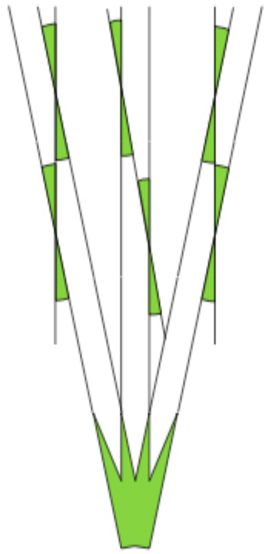
UPMC PARIS UNIVERSITAS

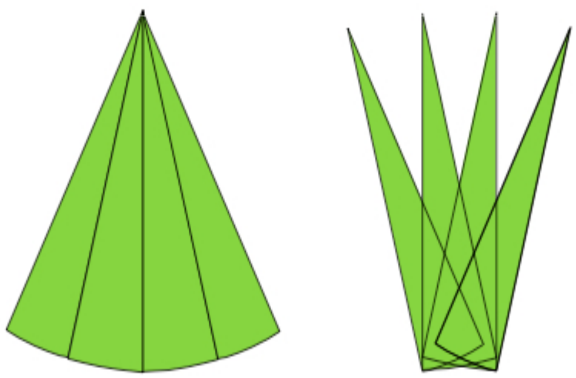
PARIS 7

L'aiguille de Kakeya

L'idée de Besicovich consiste à découper le secteur angulaire en morceaux (quatre morceaux sur notre figure), à translater les morceaux pour qu'ils se chevauchent le plus possible, puis à ajouter un chouïa de surface pour rendre possible les transitions entre les différents morceaux. Il a calculé qu'en utilisant suffisamment de morceaux, on peut rendre l'aire finale aussi petite que l'on veut.

(Il faut vraiment **beaucoup de morceaux** ; par exemple, en utilisant **24 117 248** morceaux on peut diviser la surface initiale d'un facteur 5 ; pour avoir une aire 10 fois plus petite il suffit d'utiliser **12 393 906 174 523 604 992** morceaux…)





La réponse finale au problème de Kakeya est donnée par le **théorème de Besicovich** (1928) :

Si on suppose que l'aiguille est infiniment mince, on peut la retourner en balayant une surface aussi petite que l'on veut.

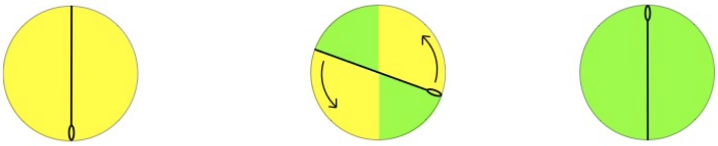
L'histoire ne s'arrête cependant pas en 1928 : des mathématiciens explorent actuellement un problème analogue en dimension supérieure, surtout depuis qu'en 1999 Jean Bourgain a mis en évidence un lien avec la répartition des nombres premiers.

L'aiguille de Kakeya

Ce stand vous propose d'explorer la question posée par Kakeya en 1917 :

Quelle est la plus petite surface à l'intérieur de laquelle il est possible de déplacer une aiguille de manière à la retourner complètement ?

Bien sûr, on peut retourner l'aiguille à l'intérieur d'un disque :



Peut-on faire mieux ?...

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UPMC PARIS UNIVERSITAS

université PARIS DIDEROT PARIS 7

L'aiguille de Kakeya

1) Le triangle de Reuleaux

On retourne maintenant l'aiguille de la façon suivante. On fixe d'abord l'une des extrémités, et on tourne l'aiguille de 60°. On fixe alors l'autre extrémité, et on tourne à nouveau de 60°. On change à nouveau d'extrémité et on fait une dernière rotation. *Dessiner la figure balayée par l'aiguille.*

2) Le triangle

Dessiner une aiguille, et un triangle équilatéral à l'intérieur duquel on peut la retourner. *Décrire le plus petit triangle équilatéral possible.*

3) D'autres formes

On vous propose maintenant d'expérimenter avec les formes en cartons disponibles sur le stand. *Sélectionner celles dans lesquelles on peut retourner l'aiguille. Essayer de les classer, au jugé, de la plus grande à la plus petite aire .*

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

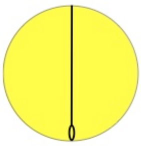
UPMC PARIS UNIVERSITAS

université PARIS DIDEROT PARIS 7

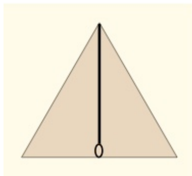
L'aiguille de Kakeya

Pour tester votre classement, nous vous proposons de calculer l'aire des surfaces les plus simples. On suppose que l'aiguille mesure 1 décimètre (dm), et on exprime les aires en dm^2. Vous pouvez vous aider de la fiche sur le calcul des surfaces, et d'une calculatrice.

4) Calculer l'aire du disque dans lequel on peut retourner l'aiguille.



5) Calculer l'aire du triangle équilatéral.



6) Calculer l'aire du triangle de Reuleaux.

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

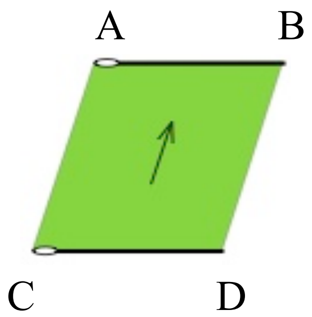
UPMC PARIS UNIVERSITAS

université PARIS DIDEROT PARIS 7

L'aiguille de Kakeya

7) Intermède

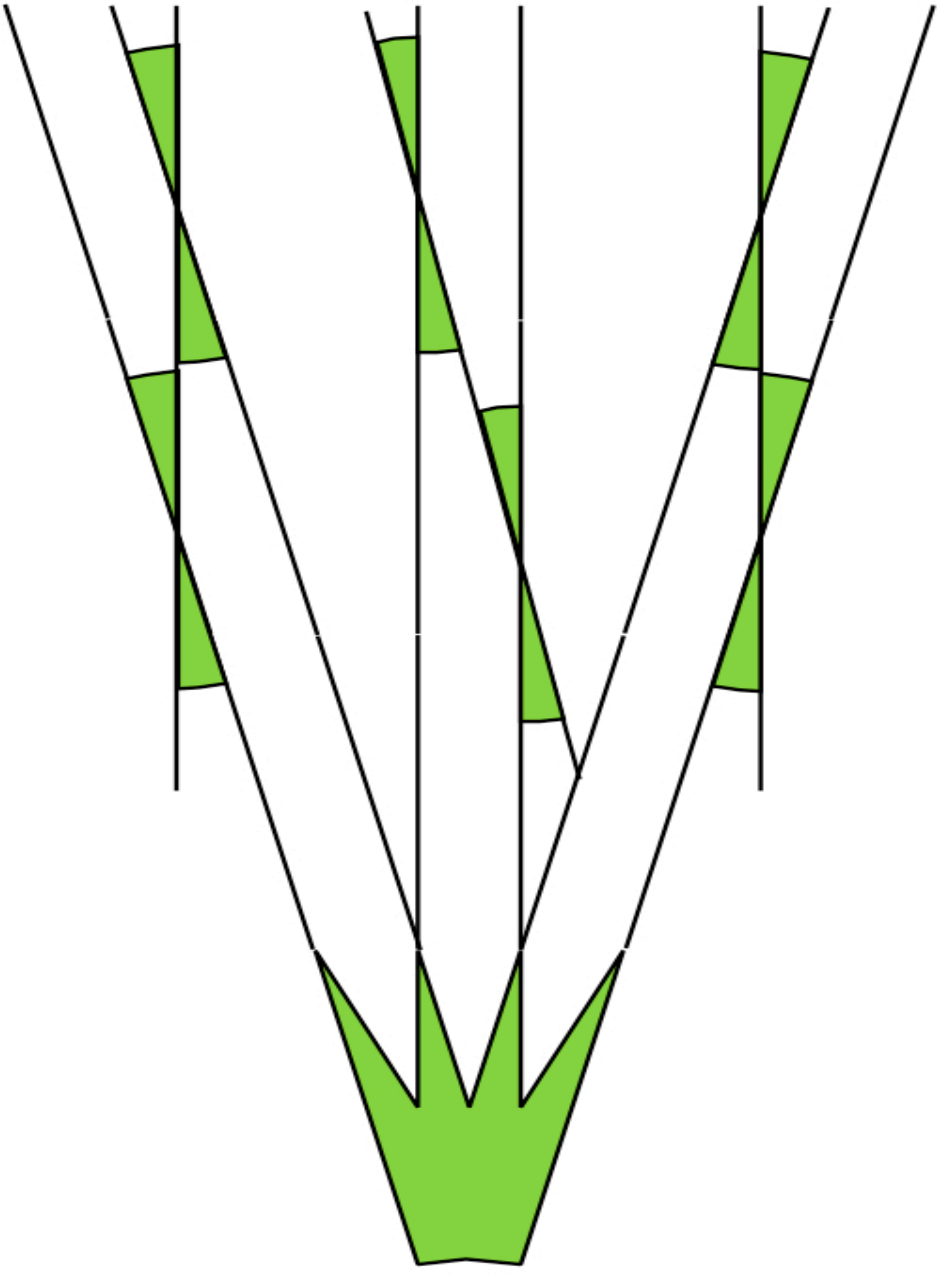
On voudrait maintenant amener l'aiguille de la position AB à une position parallèle CD. Le plus simple est de translater l'aiguille de AB à CD en balayant un parallélogramme, mais à nouveau, on voudrait trouver comment effectuer le déplacement en balayant la plus petite aire possible.



Comment faire mieux que le parallélogramme ABDC ? Quelle est la plus petite surface possible ?

8) Vers la solution

La page suivante montre un dessin imaginé par le mathématicien Besicovich ; on peut faire tourner l'aiguille de 45° tout en restant dans l'ensemble vert. *Voyez-vous comment ?*



CNRS CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

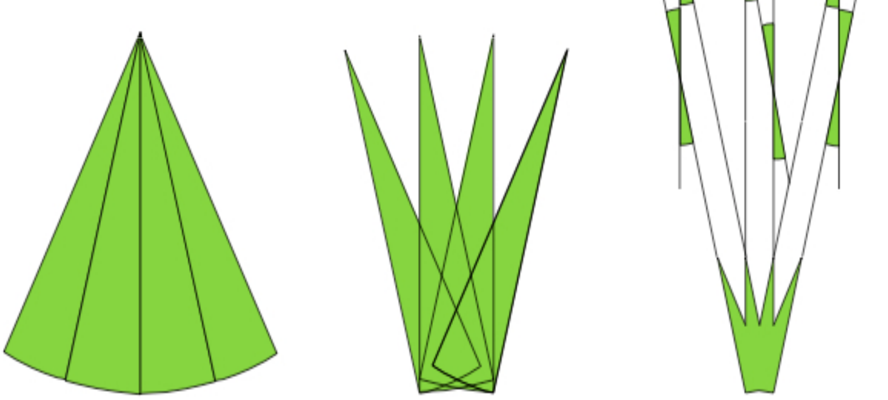
UPMC PARIS UNIVERSITAS

PARIS 7

L'aiguille de Kakeya

L'idée de Besicovich consiste à découper le secteur angulaire en morceaux (quatre morceaux sur notre figure), à translater les morceaux pour qu'ils se chevauchent le plus possible, puis à ajouter un chouïa de surface pour rendre possible les transitions entre les différents morceaux. Il a calculé qu'en utilisant suffisamment de morceaux, on peut rendre l'aire finale aussi petite que l'on veut.

(Il faut vraiment **beaucoup de morceaux** ; par exemple, en utilisant **24 117 248** morceaux on peut diviser la surface initiale d'un facteur 5 ; pour avoir une aire 10 fois plus petite il suffit d'utiliser **12 393 906 174 523 604 992** morceaux…)



La réponse finale au problème de Kakeya est donnée par le **théorème de Besicovich** (1928) :

Si on suppose que l'aiguille est infiniment mince, on peut la retourner en balayant une surface aussi petite que l'on veut.

L'histoire ne s'arrête cependant pas en 1928 : des mathématiciens explorent actuellement un problème analogue en dimension supérieure, surtout depuis qu'en 1999 Jean Bourgain a mis en évidence un lien avec la répartition des nombres premiers.